EQUISCOMPONIBILITA' ED EQUICOMPLETABILITA'

Laura Lombardi e Giangiacomo Gerla
Dipartimento di Matematica, Università di Salerno
llombardi@unisa.it gerla@unisa.it

Abstract. This is the first of two papers devoted to equiscomponibility, a powerful tool to enforce the logical capacities in students in any age.

1. Introduzione

Questo è il primo di due articoli dedicati ad una esposizione di nozioni di base della teoria dell'equiscomponibilità (per il secondo si veda [2]). Ricordiamo che, detto in breve, due figure *F* ed *F'* sono equiscomponibili se è possibile scomporre *F* in un numero finito di parti le quali possono, poi, essere ricomposte a formare *F'*.

La motivazione che ci ha spinti a scriverlo è il convincimento che tale teoria sia uno strumento utilissimo nell'insegnamento della geometria nei diversi ordini scolastici. Essa, infatti, può essere la base teorica a semplici attività laboratoriali da svolgere con forbici e fogli di carta in una scuola primaria.

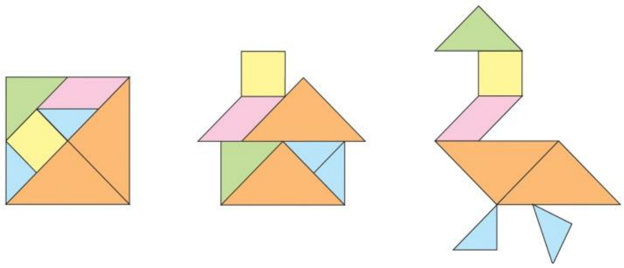

Figura 1a Figura 1b Figura 1c

Inoltre, è una nozione che è fondamentale per lo studio delle aree nelle scuole secondarie di primo e secondo grado. Ma non basta, esistono risultati sull'equiscomponibilità la cui trattazione, come ad esempio il paradosso di Banach-Tarski, può essere fatta solo negli ultimi anni del corso di laurea in matematica.

La nozione di equiscomponibilità è stata ampiamente utilizzata dai matematici dell'antica Grecia come strumento capace di ottenere risultati che corrispondono alla nostra misurazione delle figure geometriche. Come è noto, i matematici greci non intendevano la "misurazione" di una figura geometrica come l'assegnazione di un numero reale a tale figura. Essa consisteva, piuttosto, nel confronto tra le grandezze della figura con altre più semplici. Per fare un esempio, nella matematica greca non si trovano espressioni del tipo "l'area del triangolo è uguale alla misura della base per l'altezza diviso due", ma espressioni equivalenti del tipo "un triangolo ha la stessa estensione di un rettangolo che abbia la stessa base e metà dell'altezza", oppure "l'estensione di un triangolo sta a quella di un rettangolo con stessa base e stessa altezza come 1 sta a 2".

In particolar modo, tramite l'equiscomponibilità, la grandezza di una figura complessa veniva ricondotta a quella di una di tipo più semplice: ad esempio ad un quadrato. Da notare che l'idea che misurare si possa intendere come trasformare in forma canonica è stata ripresa in tempi recenti (si veda ad esempio [1]) sotto il nome di "motivic measure".

Nel seguito ci riferiremo prevalentemente a figure del piano a contorni rettilinei, che chiameremo semplicemente *"figure"*. Inoltre, esporremo le dimostrazioni solo nei tratti fondamentali lasciando al lettore il compito di completarle.

2. La nozione di equiscomponibilità

Abbiamo detto che due figure sono equiscomponibili se sono la "somma" di figure uguali. In termini di operazioni forbice + foglio, possiamo dare la seguente "definizione".

Definizione 2.1. Due figure geometriche F e F' si dicono *equiscomponibili* se è possibile:

Tagliare F nelle figure $X_1,...,X_n$

Spostare tali figure in modo da ottenere le figure $X'_1, ..., X'_n$

Ricomporre $X'_1, ..., X'_n$ in modo da ottenere F'.

Se vogliamo tradurre tale definizione in una di carattere formale possiamo precisare che cosa si intenda per "figura geometrica", "tagliare", "spostare", "ricomporre". Accettando che per figura geometrica si intenda un qualunque insieme di punti, le nozioni di "tagliare" e "ricomporre" possono essere rappresentate dalla nozione insiemistica di "partizione", che ricordiamo.

Definizione 2.2. Si dice *partizione finita* di un insieme X, una classe finita $\{X_1, \dots, X_n\}$ di insiemi non vuoti tali che:

- $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$

- per ogni i e j, con $i \neq j$, $X_i \cap X_j = \emptyset$.

Allora *"tagliare"* consiste nel passare da un insieme X (la figura) ad una sua partizione $\{X_1, \ldots, X_n\}$, *"ricomporre"* significa passare da una partizione $\{X_1, \ldots, X_n\}$ all'insieme corrispondente $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$.

Per quanto riguarda la nozione "spostare" si può ricorrere alla nozione di "isometria", che ricordiamo.

Definizione 2.3. Si dice *isometria* del piano euclideo E ogni funzione $i : R^2 \to R^2$ che conserva le distanze, cioè tale che:

$$d(x, y) = d(i(x), i(y)).$$

Data una figura A, diciamo che *i sposta* A in A' se $i(A) = A'$. In questo caso diciamo che A ed A' sono figure *isometriche* (equivalentemente *uguali* o *sovrapponibili*).

Esempi tipici sono le traslazioni, le rotazioni ed i ribaltamenti rispetto ad un asse. È evidente che la relazione di isometria tra insiemi è una relazione di equivalenza.

Definizione 2.4. Due figure geometriche F e F' si dicono *equiscomponibili* se ammettono rispettivamente due partizioni $X_1,..., X_n$ e $X'_1,..., X'_n$, tali che, per ogni i, X_i è isometrico a X'_i.

A questa definizione si deve aggiungere che la costruzione delle due partizioni deve essere fatta utilizzando solo riga e compasso. L'interesse di questa nozione è che due figure equiscomponibili, pur essendo in generale diverse, risultano avere la stessa estensione. Da notare che il riferimento è a "misure" intese come funzioni finitamente additive ed invarianti per isometrie.

Teorema 2.5. Se due figure F e F' sono equiscomponibili allora hanno la stessa misura.[1]

[1] Si assume che la scomposizione avvenga tramite pezzi che siano "misurabili", cioè dotati di area. Senza tale ipotesi la proposizione non vale (si veda il teorema 5.3 per un controesempio). D'altra parte le figure prese in considerazione dai greci erano solo triangoli, rettangoli, cerchi, parallelogrammi o altro. Figure quindi tutte misurabili.

Dim. Se μ è la funzione-misura allora, con riferimento alle notazioni della definizione precedente,

$$\mu(F) = \mu(X_1 \cup \ldots \cup X_n) = \mu(X_1) + \ldots + \mu(X_n) = \mu(X'_1) + \ldots + \mu(X'_n)$$
$$= \mu(X'_1 \cup \ldots \cup X'_n) = \mu(F') \qquad \square$$

Come suggerisce l'intuizione, l'equiscomponibilità è una relazione di equivalenza.

Proposizione 2.6. L'equiscomponibilità è una relazione di equivalenza, cioè è riflessiva, simmetrica e transitiva.

Dim. La proprietà riflessiva è ovvia. La proprietà simmetrica segue dal fatto che l'inversa di una isometria è ancora una isometria. Per provare la transitività supponiamo che A sia equiscomponibile a B e che B sia equiscomponibile a C. Allora, A può essere ripartito nelle figure $A_1,\ldots,A_n$, le quali, opportunamente spostate tramite le isometrie $f_1, \ldots, f_n$, definiscono delle figure $A'_1 = f_1(A_1),\ldots,\ A'_n = f_n(A_n)$ tali che $B = A'_1 \cup \ldots \cup A'_n$. Inoltre, B può essere ripartito nelle figure $B_1,\ldots,\ B_m$ che, opportunamente spostate tramite le isometrie $g_1,\ldots,g_m$, definiscono delle figure $B'_1 = g_1(B_1),\ldots,\ B'_m = g_m(B_m)$, tali che $C = B'_1 \cup \ldots \cup B'_m$.
Consideriamo le figure $A_{ij} = f_i^{-1}(A'_i \cap B_j)$, ottenute al variare di i e j, che costituiscono una partizione di A e le figure $A'_{ij} = g_j(f_i(A_{ij}))$, che costituiscono una partizione di C. Poiché la composizione di due isometrie è ancora una isometria, A_{ij} è uguale a A'_{ij} e quindi si può concludere che A e C sono equiscomponibili. $\square$

Ad esempio, sia A un parallelogramma equiscomponibile al rettangolo B (Figura 2) e sia B equiscomponibile al triangolo C (Figura 3). Scomponendo ulteriormente la figura A (Figura 4a) e ricomponendo i suoi pezzi si ottiene ancora il triangolo C (Figura 4b), ovvero il parallelogramma A è equiscomponibile al triangolo C.

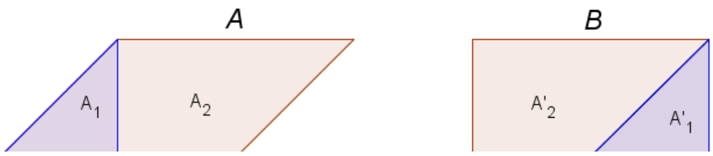

Figura 2a   Figura 2b

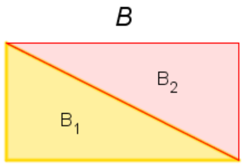

Figura 3a

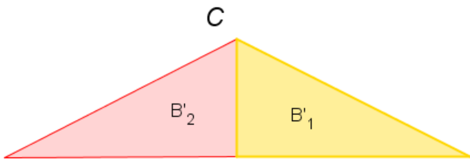

Figura 3b

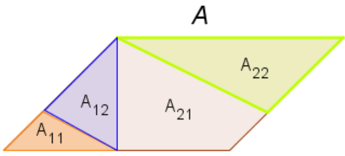

Figura 4a

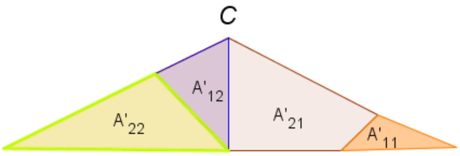

Figura 4b

3. Esempi famosi

Il teorema 2.5 permette di ricavare le usuali formule per il calcolo delle aree dei poligoni. Ecco alcuni esempi.

Teorema 3.1. Ogni triangolo è equiscomponibile ad un rettangolo avente la stessa base e come altezza la metà di quella del triangolo.

Ogni parallelogramma è equiscomponibile ad un rettangolo avente la stessa base e la stessa altezza.

Ogni trapezio è equiscomponibile ad un triangolo avente la stessa altezza e come base la somma delle basi del trapezio.

Dim. Dato un triangolo ABC (Figura 5a) tracciamo, dal punto medio M dell'altezza CH, la parallela alla base AB che lo interseca nei punti O e O'. Dai vertici A e B del triangolo conduciamo le perpendicolari alla retta per O e O' in modo da costruire il rettangolo $ABA'B'$.

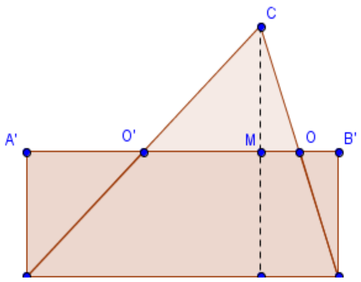

Figura 5a

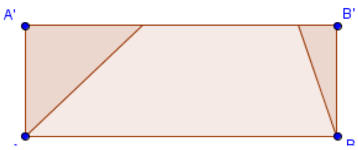

Figura 5b

L’equiscomponibilità tra il triangolo ABC ed il rettangolo $ABA'B'$ segue dal fatto che tali figure hanno il trapezio $ABOO'$ in comune e i triangoli CMO e CMO' rispettivamente uguali ai triangoli $BB'O$ e $AA'O'$. Facendo ruotare i triangoli CMO e CMO' intorno ai punti O e O' è possibile visualizzare tale equiscomponibilità (Figura 5b).

Per dimostrare la seconda parte del teorema consideriamo il parallelogramma $ABCD$ e l’altezza BH relativa alla base AD (Figura 6a). Prolunghiamo la base AD e tracciamo da C la perpendicolare ad essa in modo da ottenere il triangolo CDH'. L’equiscomponibilità tra il parallelogramma $ABCD$ ed il rettangolo $BCHH'$ segue dal fatto che tali figure hanno il trapezio $BCHD$ in comune e il triangolo ABH uguale al triangolo CDH'. Facendo traslare il triangolo ABH del vettore AD è possibile visualizzare tale equiscomponibilità (Figura 6b).

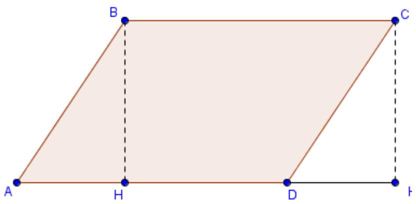

Figura 6a

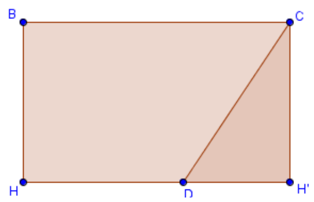

Figura 6b

Infine, lasciamo al lettore il compito di dimostrare l’ultima parte del teorema limitandoci ad indicare la figura corrispondente.

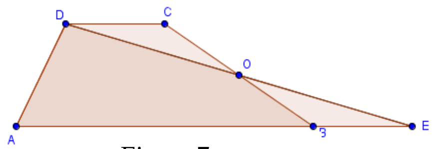

Figura 7

□

Detto in termini moderni, i risultati di tale teorema si esprimono dicendo che:

- *l’area del triangolo è uguale al semiprodotto della base e dell’altezza.*
- *l’area del parallelogramma è uguale al prodotto della base e dell’altezza.*
- *l’area del trapezio è uguale alla somma delle basi per l’altezza diviso due.*

Spesso viene provato anche il seguente teorema.

Teorema 3.2. Ogni poligono regolare è equiscomponibile ad un rettangolo avente per base il semiperimetro del poligono e per altezza la sua apotema.

Dim. Consideriamo, ad esempio, un esagono regolare, in tal caso è sufficiente scomporlo in 7 triangoli, come mostra la Figura 8a e ricomporre tali triangoli in modo da formare un rettangolo (Figura 8b).

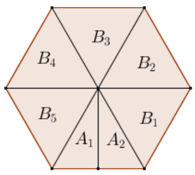

Figura 8a

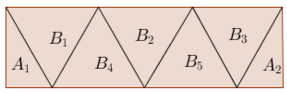

Figura 8b

□

In termini attuali tale teorema si esprime dicendo che:

- *l'area di un poligono regolare è pari al semiprodotto di perimetro e apotema.*

Problemi. Nel seguito poniamo alcuni problemi che possono essere proposti a studenti della scuola secondaria. La soluzione è suggerita dalla figura.

1) Si dimostri che ogni rombo è equiscomponibile alla metà di un rettangolo avente per lati le diagonali del rombo. Ricavarne la formula dell'area del rombo.

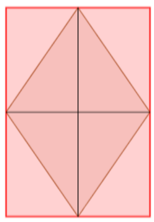

Figura 9

2) Si consideri la croce in Figura 10a costituita da cinque quadrati uguali. Si provi che essa è equiscomponibile ad un quadrato Q. (Suggerimento: supponendo che ciascun quadratino abbia lato

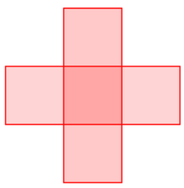

Figura 10a

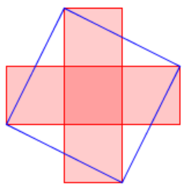

Figura 10b

unitario, allora Q deve avere area 5. Quindi, il suo lato al quadrato vale 5. Per il teorema di Pitagora tale lato deve essere l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti …).

4. Equicompletabilità

Visto che, in un certo senso, due figure sono equiscomponibili se sono "somma" di pezzi uguali, si può considerare la possibilità che due figure siano la "differenza" tra figure uguali. In effetti, un metodo duale all'equiscomponibilità consiste, date due figure, nell'aggiungere ad esse parti uguali in modo che risultino ancora uguali.

Definizione 4.1. Due figure si dicono *equicompletabili* se aggiungendo ad esse parti a due a due uguali si ottengono poligoni uguali.

Nella Figura 11 i due quadrilateri iniziali, parallelogramma e rettangolo, sono equicompletabili in quanto aggiungendo ad essi lo stesso triangolo si ottengono due trapezi uguali. Banalmente si dimostra che vale la seguente proposizione.

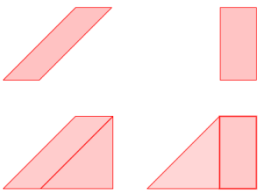

Figura 11

Proposizione 4.2. Due figure equicompletabili hanno la stessa misura.

Per mostrare un esempio di applicazione della nozione di equicompletabilità, proviamo il teorema di Pitagora.

Teorema 4.3 (Teorema di Pitagora). Dato un triangolo rettangolo, i quadrati costruiti sui suoi cateti costituiscono una figura equicompletabile con il quadrato costruito sull'ipotenusa.

Dim. Dato il triangolo rettangolo *ABC,* costruiamo il quadrato *DEFG* avente come lato la somma dei cateti del triangolo *ABC* (Figura 12b).

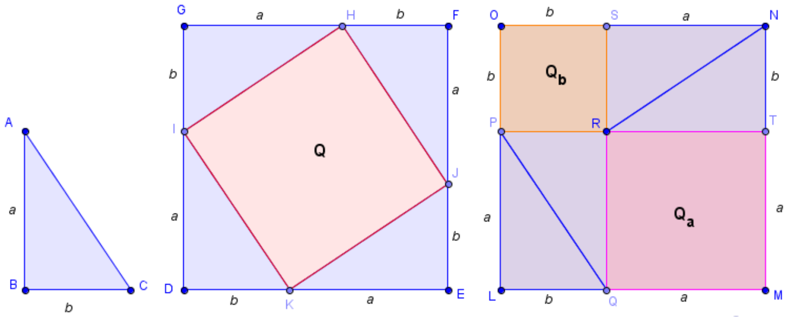

Figura 12a Figura 12b Figura 12c

Tale quadrato si può scomporre in 4 triangoli rettangoli (tutti uguali al triangolo *ABC*) e nel quadrato **Q** costruito sull'ipotenusa del triangolo *ABC*. Ma *LMNO* può essere scomposto (Figura 12c) anche in 4 triangoli rettangoli (tutti uguali al triangolo *ABC*) e nei due quadrati $\mathbf{Q_a}$ e $\mathbf{Q_b}$ aventi per lati i cateti del triangolo rettangolo *ABC*. Dall'uguaglianza dei due quadrati, *DEFG* e *LMNO*, sottraendo ad entrambe le figure i 4 triangoli rettangoli uguali, segue che $\mathbf{Q_a}$ + $\mathbf{Q_b}$ è equicompletabile con **Q**.

□

5. Equiscomponibilità ed intuizione

La dimostrazione ora esposta è visivamente immediata e capace di mostrare " in un colpo d'occhio" la validità del teorema. Riusciamo a percepire che i quadrati **Q** e $\mathbf{Q_a}$ + $\mathbf{Q_b}$ sono uguali guardando queste figure come differenze di figure uguali. Dimostrazioni di questo tipo in didattica della matematica prendono il nome di dimostrazioni *"visuali"* e si basano proficuamente sull'intuizione. Tuttavia, è necessario anche tenere conto del fatto che l'intuizione è spesso fonte di errori come avviene, ad esempio, nella seguente proposizione la cui dimostrazione sembra valida ma non lo è (si invita a trovare l'errore).

Proposizione 5.1. (Paradosso della scomposizione del quadrato). È possibile scomporre un quadrato di area 64 ed ottenere un rettangolo di area 65.

Dim. Costruiamo un quadrato *ABCD* di lato 8 e tagliamolo in due rettangoli *ABEF* e *CDEF* di lati, rispettivamente, 8 e 5 e 8 e 3. Tagliamo il rettangolo *CDEF* in due triangoli rettangoli di cateti 3 e 8 ed il rettangolo *ABEF* in due trapezi rettangoli di basi 5 e 3 e di altezza 5.

Ricomponiamo, poi, tali pezzi in modo da ottenere il rettangolo *A'B'C'D'* avente lati 13 e 5. Per costruzione il quadrato *ABCD* ed il rettangolo *A'B'C'D'* sono equiscomponibili.

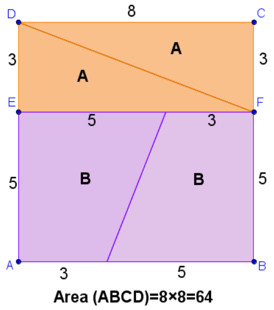

Figura 13a

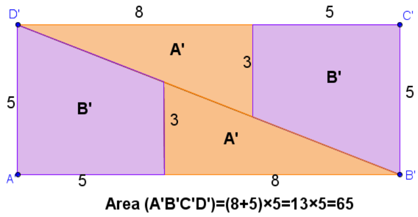

Figura 13b

Inoltre, l'area del quadrato è uguale a 8×8 = 64, mentre l'area del rettangolo risulta uguale a 13×5 = 65. □

Ecco, invece, un esempio di applicazione del metodo della equiscomponibilità che, pur essendo corretto, fornisce un risultato che sembra falso.

Proposizione 5.2. (Paradosso degli otto raggi). Un cerchio *C* di raggio *r* si può scomporre in un numero finito di pezzi e ricomporre in modo da formare una figura *C'* costituita da un cerchio uguale a *C* più 8 segmenti di lunghezza *r*.

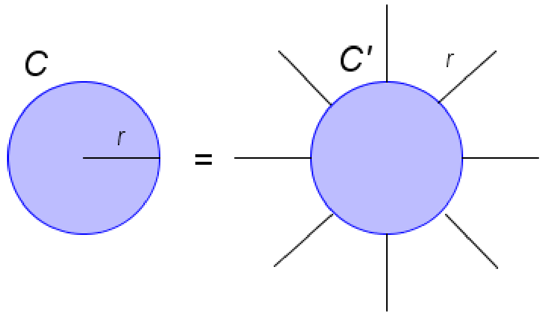

Figura 14

Dim. Supponiamo che *C* abbia centro nell'origine *O* di un sistema di riferimento cartesiano e sia A_1, A_2, …, A_n... la successione di punti che si ottiene a partire dal punto A_1 di coordinate (1; 0) e tale che A_i si ottiene ruotando A_{i-1} in senso antiorario di un angolo uguale ad 1 radiante.

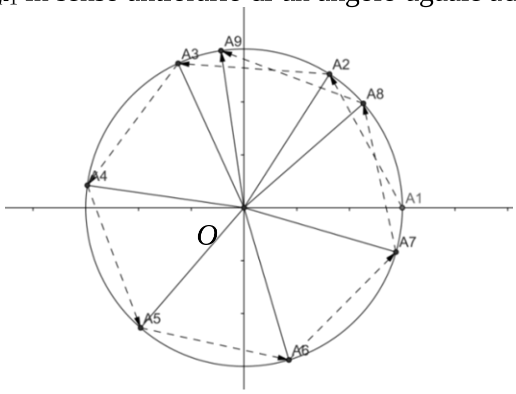

Figura 15

In altre parole, A_n è il punto della circonferenza tale che OA_n forma un angolo $n - 1$ con l'asse delle ascisse. Tali punti sono tutti diversi tra loro poiché se fosse $A_n = A_m$ dovrebbe essere $n - m$ un multiplo di 2π e quindi $n - m = 2\pi q$. Ma ciò è assurdo in quanto in tal caso risulterebbe $\pi = (n - m)/2q$, in contrasto con l'irrazionalità di π.
Indichiamo con OA_i l'insieme dei punti del segmento aperto di estremi O e A_i e chiamiamo *raggiera* l'insieme $Ra = \cup_{n\in N} OA_n$ dei punti dei segmenti OA_n.
Per prima cosa mostriamo che è possibile togliere dal cerchio C il primo raggio OA_1 e "metterlo da parte". In questo modo, nel cerchio si viene a creare un "vuoto" che può essere riempito ruotando in senso orario la raggiera, in modo da portare il segmento OA_2 a ricoprire tale spazio. Si riottiene, così, il cerchio C più un raggio. Iterando questo procedimento si mettono da parte gli otto raggi richiesti che si possono disporre opportunamente per ottenere la figura C'. □

Da notare che tale proposizione è compatibile con il fatto che figure equiscomponibili hanno uguale estensione. Infatti, gli otto segmenti hanno misura nulla.

Concludiamo con un esempio di equiscomponibilità che contrasta completamente con l'intuizione, noto come "paradosso di Banach-Tarski" dal nome dei suoi autori (si veda ad esempio [4]).

Teorema 5.3. (Paradosso di Banach-Tarski). Se si accetta l'assioma della scelta, una sfera di raggio unitario è equiscomponibile ad una coppia di sfere di raggio unitario.

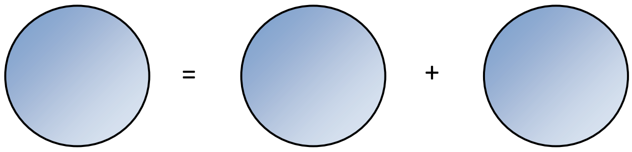

Figura 16

Tale teorema viene anche chiamato "paradosso dei pani e dei pesci" poiché ricorda il famoso miracolo raccontato nei vangeli, miracolo che sembrerebbe, quindi, logicamente possibile. Pur non riportando la sua dimostrazione, che risulta piuttosto complessa, osserviamo che da tale teorema segue il seguente corollario.

Corollario 5.4. Non esiste nessun tipo di misura non nulla finitamente additiva ed invariante per isometrie capace di misurare tutti i sottoinsiemi del piano.

Dim. Basta osservare che se tutti i pezzi della scomposizione, di cui parla il paradosso di Banach-Tarski, fossero misurabili allora il volume della sfera sarebbe uguale a due volte il volume della sfera stessa. □

Bibliografia

[1] Hales T. C. (2005), Wath is motivic measure?, *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 42, n. 3, 119-135.
[2] Lombardi L., Gerla G., Equiscomponibilità come metodo universale, sottomesso al Periodico di Matematiche.
[3] Gerla G. (2013), Tentativi di fondare la matematica, vol. 1, *Ilmiolibro*, casa editrice *L'Espresso*.
[4] Wagon S. (1985), *The Banach–Tarski Paradox*, Cambridge University Press.